www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 heures

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées sous réserve des conditions définies dans la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

PARTIE I

On désigne par α un réel quelconque et on note g_α la fonction de la variable t, définie sur $[0, +\infty[$, par :

$$g_\alpha(t) = t^{\alpha t} \quad \text{si } t > 0 \qquad g_\alpha(0) = 1$$

On note (C_α) la courbe représentative de g_α dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé.

I - 1 - a - Etudier la continuité de g_α.

I - 1 - b - Etudier, suivant les valeurs de α, la limite de $g_\alpha(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.

I - 2 - On suppose, dans cette question, que α est non nul. On note respectivement g'_α et g''_α les dérivées première et seconde de g_α lorsqu'elles existent.

I - 2 - a - Calculer g'_α et préciser son ensemble de définition.

I - 2 - b - Etudier, suivant les valeurs de α, les variations de g_α.

I - 2 - c - Montrer que l'on a, pour tout t strictement positif : $g''_\alpha(t) = \alpha^2 t^{\alpha t - 1} . \psi_\alpha(t)$

où ψ_α désigne une fonction de la variable t, dépendant du paramètre α ; expliciter ψ_α.

I - 2 - d - Déterminer, suivant les valeurs de α, le nombre des racines de l'équation $\psi_\alpha(t) = 0$ où t est strictement positif.

I - 2 - e - Etudier la concavité de (C_α).

I - 3 - a - Soient deux réels α_1 et α_2 tels que $\alpha_1 < \alpha_2$.

Déterminer l'intersection de (C_{α_1}) et de (C_{α_2}) et préciser la position relative de ces deux courbes.

I - 3 - b - Construire (C_1) et (C_{-1}) dans un même repère orthonormé du plan euclidien ; on précisera les tangentes à ces deux courbes aux points d'intersection.

PARTIE II

Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des couples (x, y) de $\mathbb{R}^2$ tels que l'intégrale : $F(x, y) = \int_0^1 t^x (-\ln t)^y dt$ ait un sens.

II - 1 - Déterminer $\mathcal{D}$ et le représenter dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé.

II - 2 - On pose : $\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt$

II - 2 - a - Pour quelles valeurs de x l'intégrale $\Gamma(x+1)$ a-t-elle un sens ?

II - 2 - b - Déterminer une relation entre F(x, x) et $\Gamma(x+1)$.

II - 3 - Déterminer une relation entre F(x, y) et F(x, y+1).

II - 4 - On suppose, dans cette question, que x et y sont des entiers naturels. Calculer F(x, y) et F(x, x).

II - 5 - On considère la fonction u de la variable t définie par : $u(t) = t \ln t$ si $t \in]0, 1]$
$u(0) = 0$

Tournez la page S.V.P.

II - 5 - a - Etudier les variations de u.

II - 5 - b - Calculer : $I_p = \int_0^1 [u(t)]^p \, dt$ p désignant un entier naturel.

PARTIE III

Dans cette partie u désigne toujours la fonction définie en II-5.

On considère la fonction μ des deux variables t et x définie sur $[0,1] \times \mathbb{R}$ par : $\mu(t,x) = t^{tx}$ si $t \in]0,1]$ et $x \in \mathbb{R}$, $\mu(0,x) = 1$ si $x \in \mathbb{R}$

On se propose d'étudier différentes propriétés de la fonction h définie sur IR par : $h(x) = \int_0^1 \mu(t, x) \, dt$

III - 1 - Montrer que h est strictement monotone sur IR et préciser son sens de variation.

III - 2 - a - Montrer que la fonction μ est continue sur $[0,1] \times \mathbb{R}$.

III - 2 - b - Etudier la continuité de h sur IR.

III - 3 - a - Montrer que h est dérivable sur IR, la dérivée h' de h s'exprimant par : $h'(x) = \int_0^1 u(t)\mu(t, x) \, dt$

III - 3 - b - Montrer que h est indéfiniment dérivable sur IR . Désignant par $h^{(n)}$ la dérivée d'ordre n de h, préciser l'expression de $h^{(n)}(x)$ à l'aide d'une intégrale.

III - 4 - a - Etudier : $\lim_{x \to -\infty} \int_{1/e}^{2/e} \mu(t, x) \, dt$

En déduire : $\lim_{x \to -\infty} h(x)$ et $\lim_{x \to -\infty} \frac{h(x)}{x}$

III - 4 - b - Etudier : $\lim_{x \to +\infty} h(x)$

III - 5 - On considère la série de terme général : $w_k(t, x) = \frac{[u(t)]^k \, x^k}{k!}$

où $t \in [0,1]$, $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$ (avec par convention $w_0(t, x) = 1$).

III - 5 - a - Si t est fixé dans $[0,1]$, quel est le rayon de convergence de la série entière de la variable x de terme général $w_k(t, x)$? Expliciter

$$\sum_{k=0}^{\infty} w_k(t, x)$$

III - 5 - b - On suppose que x est un réel fixé. La série de fonctions de la variable t, de terme général $w_k(t, x)$, est-elle uniformément convergente sur $[0,1]$?

III - 6 - a - Montrer que h est développable en série entière. Expliciter ce développement et préciser le rayon de convergence de la série obtenue.

III - 6 - b - Déterminer, pour $x \in \{1,2,3\}$, une valeur approchée $\tilde{h}(x)$ de h(x) telle que $|\tilde{h}(x) - h(x)| < 10^{-3}$.

III - 7 - Tracer, dans un repère orthonormé du plan euclidien, la courbe représentative (H) de h.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail